

Modèle d'Anderson et produit de matrices aléatoires

Raphael Ducatez¹

¹doctorant au CEREMADE, Université Paris Dauphine.

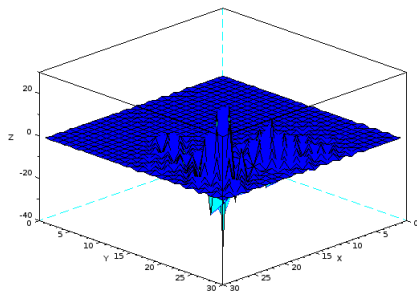
Les probabilités de demain

Grandes lignes

- 1 Le Modèle d'Anderson, étude spectral d'un système physique aléatoire.
 - Le modèle d'Anderson
 - Localisation des vecteurs propres.
 - État de l'art

- 2 Modèle à une dimension et produits de matrices aléatoires.
 - Le modèle d'Anderson à une dimension.
 - Les théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires
 - La localisation en une dimension

I-Le Modèle d'Anderson, étude spectral d'un système physique aléatoire.



Modèle d'Anderson.

Modèle d'Anderson (1958)

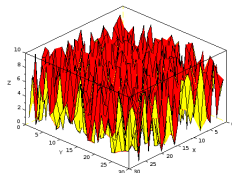
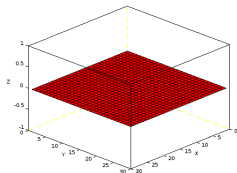
Sur $\Omega = [0, L]^d \cap \mathbb{Z}^d$

$$i\partial\phi = (-\Delta + \alpha V_\omega)\phi = H\phi$$

avec Δ le laplacien sur Ω , et V_ω un potentiel aléatoire.

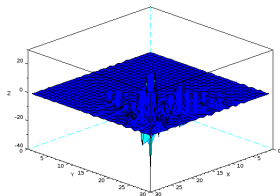
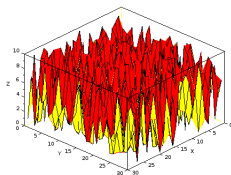
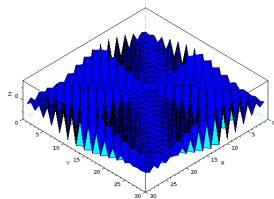
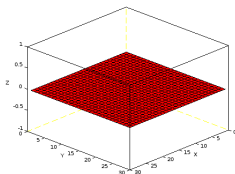
$$(\Delta\phi)(x) = \sum_{x\sim y} [\phi(y) - \phi(x)] \quad (V_\omega\phi)(x) = v_x(\omega)\phi(x)$$

où v_x sont des variables aléatoires iid. (Figure $\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$)



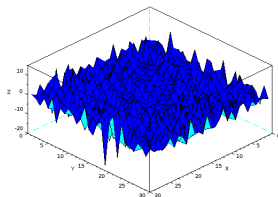
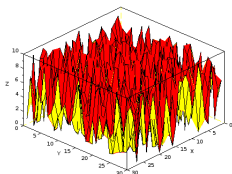
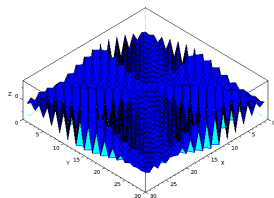
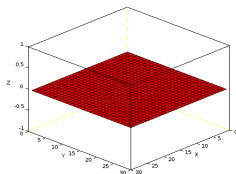
Des vecteurs propres du Hamiltonien d'Anderson

Un vecteur propre dans le cas sans ou avec désordre.

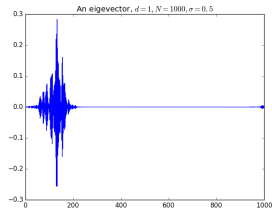
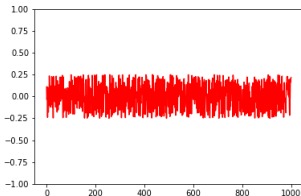
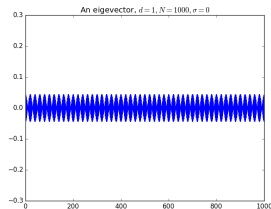
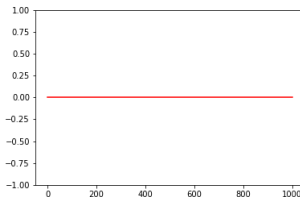


Des vecteurs propres du Hamiltonien d'Anderson

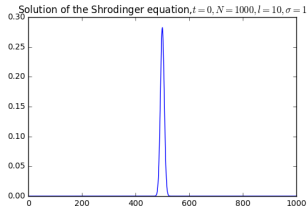
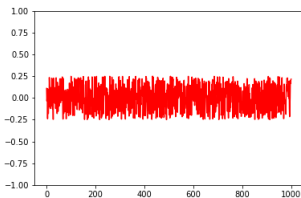
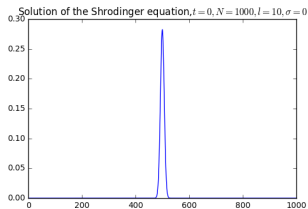
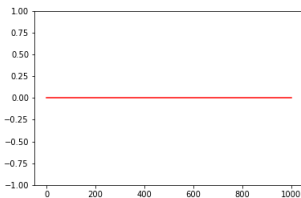
Un vecteur propre dans le cas sans ou avec désordre.



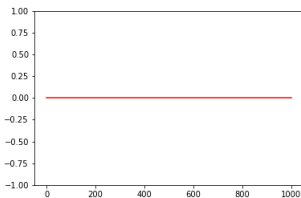
Cas à une dimension



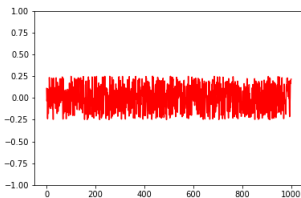
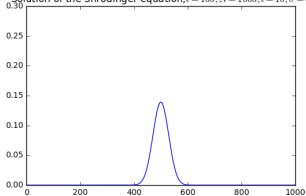
Transport balistique et localisation dynamique.



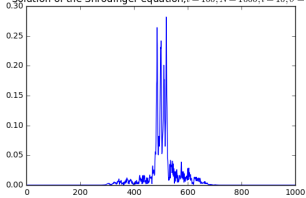
Transport balistique et localisation dynamique.



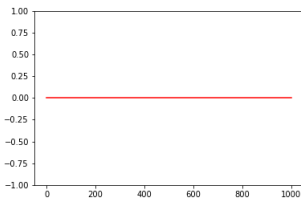
Solution of the Shrodinger equation, $t = 100, N = 1000, l = 10, \sigma = 0$



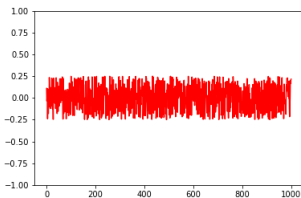
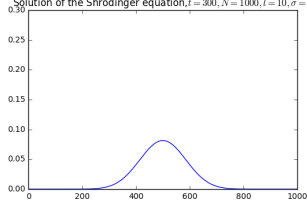
Solution of the Shrodinger equation, $t = 100, N = 1000, l = 10, \sigma = 1$



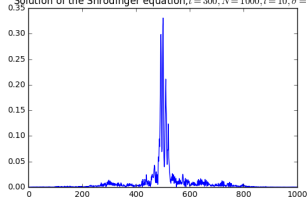
Transport balistique et localisation dynamique.



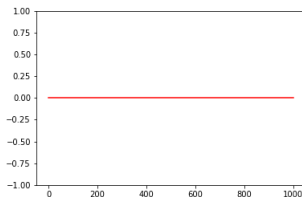
Solution of the Shrodinger equation, $t = 300, N = 1000, l = 10, \sigma = 0$



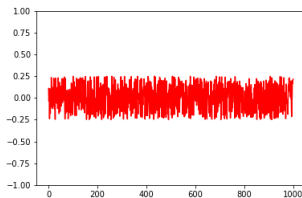
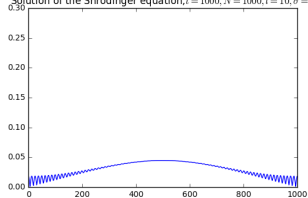
Solution of the Shrodinger equation, $t = 300, N = 1000, l = 10, \sigma = 1$



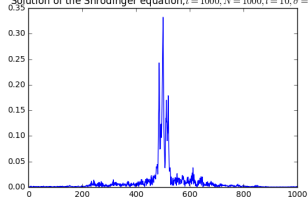
Transport balistique et localisation dynamique.



Solution of the Shrodinger equation, $t = 1000$, $N = 1000$, $l = 10$, $\sigma = 0$



Solution of the Shrodinger equation, $t = 1000$, $N = 1000$, $l = 10$, $\sigma = 1$



État de l'art

Localisation en dimension ≥ 2

- Si l'aléa est suffisamment fort, on a la localisation partout.
- Quelque soit l'aléa, on a la localisation sur les bords du spectre.

Problème ouvert : délocalisation en dimension ≥ 3

Si l'aléa est faible, il existe des vecteurs propres complètement délocalisés.

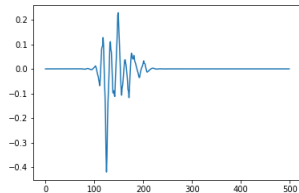
Conjecture : localisation en dimension 2

Quelque soit l'aléa, les vecteurs propres sont localisés (peut-être avec décroissance lente.)

Localisation en dimension 1

Quelque soit l'aléa ($\alpha \neq 0$), on a localisation sur tout le spectre (avec un régime critique en $\alpha = N^{-1/2}$).

II-Modèle à une dimension et produits de matrices aléatoires.



Diagonalisation et produit de matrices aléatoires

Remarque : u_n est vecteur propre de H avec valeur propre λ ssi

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= (v_n(\omega) - \lambda)u_n - u_{n-1} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_n(\omega) - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} &= \prod_{k=1}^n T_\lambda(v_k(\omega)) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

Conclusion : il suffit d'étudier $M_n = \prod_{k=1}^n T_\lambda(v_k(\omega))$

Norme de produit de matrices aléatoires

T_k des matrices aléatoires IID, $x_0 \in \mathbb{S}^d$, $x_n = \frac{M_n x_0}{\|M_n x_0\|}$, $S_n = \log(\|M_n x_0\|)$

$$S_n = \log\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\|M_{k+1} x_0\|}{\|M_k x_0\|}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \log\left(\|T_{k+1} \frac{M_k x_0}{\|M_k x_0\|}\| \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \log(\|T_{k+1} x_k\|)$$

- On a une somme de variables $y_k = \log(\|T_{k+1} x_k\|)$.
- x_k est une chaîne de Markov sur \mathbb{S}^d (espace compacte)
- Il existe μ une mesure sur \mathbb{S}^d qui soit invariante pour ce processus de Markov.

Heuristique : pour $|i-j|$ grand, y_i et y_j seront « presque indépendant ».

Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires

- Exposant de Lyapunov (loi des grands nombre) : Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que presque sûrement on a

$$\frac{1}{n} \log(\|M_n x_0\|) \rightarrow \gamma$$

- (TCL) Il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que on a la convergence en loi

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (\log(\|M_n x_0\|) - \gamma n) \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

- (Donsker) Pour $t \in [0, T]$ on pose

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} (\log(\|M_{\lfloor nt \rfloor} x_0\|) - \gamma \lfloor nt \rfloor)$$

Alors $X_n(t)$ converge en loi vers σB_t le mouvement Brownien.

Retour à la localisation une dimension.

Quelque soit l'aléa ($\alpha \neq 0$), on a localisation sur tout le spectre

Les matrices $T_\lambda(v_k(\omega))$ ne sont pas indépendantes car
 $\lambda = \lambda(v_1(\omega), v_2(\omega), \dots, v_N(\omega))$.

- *il faut ajouter une « coupure » aléatoire n_λ sur $[1, N]$.*
- Construire $u_\lambda(k)$ de la manière suivante

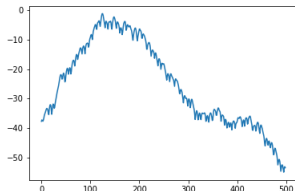
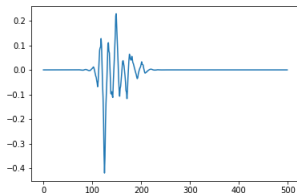
$$u_\lambda(k) = \begin{cases} u_\lambda^f(k) = \prod_{i=1}^k T_\lambda(v_i) u_0 & \text{si } k \leq n_\lambda \\ u_\lambda^b(k) = \prod_{i=k+1}^N T_\lambda^{-1}(v_i) u_N & \text{si } k \geq n_\lambda \end{cases} \quad (1)$$

Positivité de l'exposant de Lyapunov

Quelque soit l'aléa si $\alpha \neq 0$ alors $\gamma > 0$.

Conclusion

Un vecteur propre $u_\lambda(n)$ et $\log(u_\lambda(n)^2 + u_\lambda(n+1)^2)$



La fin

Merci de votre attention.

Bibliographie I

- An invitation to random schrodinger opérator (Werner Kirsch)
- Spectral Theory of Random Schrodinger Operators (Carmona, Lacroix)
- Cought by disorder (Peter Stollmann)
- A Forward Backward random process for the spectrum of 1D Anderson operators (RD)